

Membrantheorie einer Kragsschale

Koch, Karl Heinz
Pflüger, Alf

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 8, 1956,
S.121-129



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Membrantheorie einer Kragsschale

Von K. H. Koch und A. Pflüger

Mit 9 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn O. Flachsbart

Summary: The state of membrane-stress is investigated for a type of shell which is suitable to serve as roof for buildings with rectangular layout where the total load is transmitted by shear to side-girders or trusses respectively. The solution is carried out with the aid of Pucher's differential equation; a special method is developed for its integration.

Übersicht: Es wird der Membranspannungszustand einer Schalenform ermittelt, die zur Überdachung rechteckiger Grundrisse geeignet ist und die gesamte Belastung durch Schub auf Randglieder bzw. Binder absetzt. Zur Lösung wird die Puchersche Differentialgleichung benutzt und eine für den vorliegenden Fall geeignete Integrationsmethode entwickelt.

1. Einleitung

Zur Überdachung rechteckiger Grundrisse pflegt man im allgemeinen Zylinderschalen zu verwenden, die an ihren Stirnseiten durch Giebelwände abgeschlossen werden. Eine in architektonischer und statischer Hinsicht andere Lösung zeigt Abb. 1. Der mittlere Teil der Konstruktion ist eine Zylinderschale, die sich auf zwei Binder abstützt. Zu beiden Seiten schließen sich dann Schalen an, die als „Kragsschalen“ bezeichnet seien, da sie ebenfalls ihr Gewicht

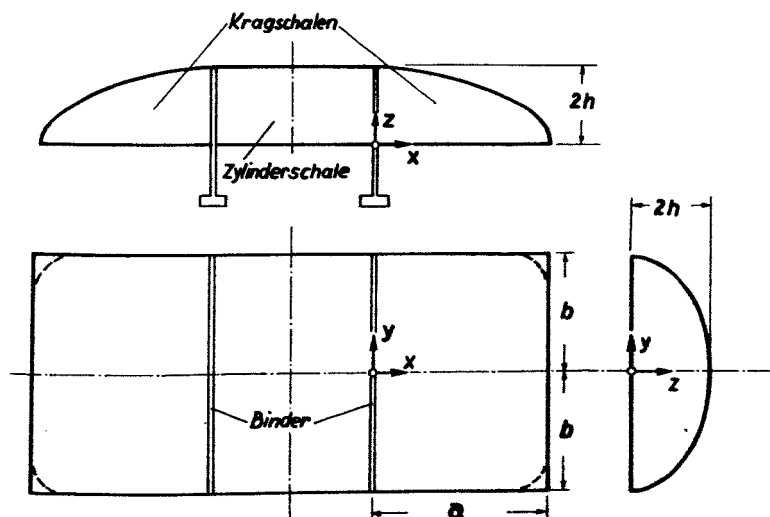


Abb. 1. Systemskizze der untersuchten Schale

auf die Binder absetzen sollen. Die mittlere Zylinderschale kann auch ganz fehlen, wobei sich dann die beiden Binder zu einem vereinigen. Die Theorie der Zylinderschale bietet nichts Neues. Die folgenden Ausführungen sollen sich mit der Membrantheorie der Kragenschale befassen.

Wenn sich die Gesamtlast der Konstruktion allein auf die Binder absetzen soll, müssen die Grundrißränder der Schale frei von Normalkräften sein. Bei flachen Schalen der vorliegenden Art ist allein die Belastung aus Eigengewicht und Schnee wichtig. Für diese senkrechte Belastung läßt sich die geforderte Bedingung schon im Rahmen der Membrantheorie bekanntlich dadurch erfüllen, daß längs der Ränder die Tangentialebene an die Schalenmittelfläche senkrecht gewählt wird. Es treten dann nur Randschubkräfte auf, die durch ein Randglied aufgenommen werden können. Die so entstehende Konstruktion ist wegen der nicht notwendigen Unterstützung der Ränder recht zweckmäßig und lediglich schalungstechnisch ungünstig.

Die nachstehenden Rechnungen mögen sich auf folgende spezielle Form der Kragenschale beziehen:

$$z = h(1 - \xi^3 + \sqrt{1 - \xi^3})(1 - \eta^2 + \sqrt{1 - \eta^2}). \quad (1)$$

Dabei sind die Bezeichnungen von Abb. 1 und die dimensionslosen Koordinaten

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

eingeführt. (1) erfüllt die Bedingung senkrechter Randtangentialebenen und stellt eine architektonisch brauchbare Form dar. Lediglich in den Grundrißecken wird eine Abweichung von der durch (1) gegebenen Gestalt wünschenswert sein, z. B. durch eine passende Ausrundung der Ecke. Dieses ist auch schon aus statischen Gründen zweckmäßig, da sich zeigen wird, daß die Membranlösung des Problems in den Ecken singular und damit unbrauchbar wird, so daß die Biegetheorie herangezogen werden müßte. Der Spannungszustand in den Eckausrundungen wird am besten durch Näherungsbetrachtungen erledigt, die der gerade gewählten Ausrundungsform anzupassen sind und hier nicht näher betrachtet werden sollen. Die folgende Rechnung ist also nur bei Ausschluß eines gewissen Eckbereiches brauchbar.

2. Differentialgleichung und Randbedingungen

Der Spannungszustand der Schale wird am besten durch die von Pucher¹⁾ eingeführte Darstellungsweise beschrieben. Danach werden, Abb. 2 entsprechend, rechtwinklige Koordinaten benutzt und die Schnittkräfte an einem Schalenelement definiert, dessen Grundriß das Element $dx dy$ ist. Das Gleichgewicht der „schiefen“ Schnittkräfte N_x , N_y und N_{xy} ergibt sich dann unter Einführung einer Spannungsfunktion F aus folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} = (\dots)', \quad \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} = (\dots)^\cdot, \\ F'' z'' - 2F'' z' + F'' z'' = q, \quad (2)$$

¹⁾ A. Pucher, Beton und Eisen 33 (1934), S. 298.

$$N_x = \frac{F''}{b^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi}, \quad N_y = \frac{F''}{a^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi}, \quad N_{xy} = -\frac{F''}{ab}, \quad (3a, b, c)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z'}{a}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{z'}{b}. \quad (4a, b)$$

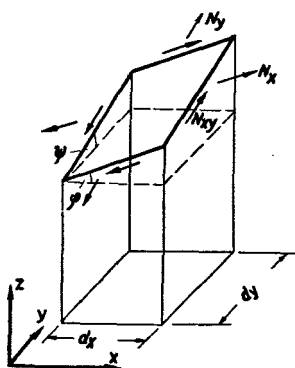


Abb. 2.
Schnittkräfte am Schalelement

q ist dabei die Belastung je Flächeneinheit des Grundrisses der Schalenmittelfläche. Zur Erfassung des Eigengewichtes ist es zweckmäßig, mit einer Belastung je Einheit der Schalenmittelfläche zu rechnen. Diese Belastung sei g ; sie ist mit q durch die Beziehung

$$q = g \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z'}{b}\right)^2} \quad (5)$$

verknüpft. Die Aufgabe besteht darin, bei gegebenem z und q die Funktion F so zu bestimmen, daß (2) unter Berücksichtigung der Randbedingungen erfüllt wird.

Über diese Randbedingungen ist folgendes zu sagen. Wie schon erwähnt, müssen längs der Traufenränder der Schale alle Normalkräfte verschwinden. Es muß also sein

$$\left. \begin{aligned} z = 0, \quad x = a: \quad F_{yy} &\equiv 0, \\ z = 0, \quad y = \pm b: \quad F_{xx} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (6a, b)$$

Mit (6) kann (2) eindeutig integriert werden, so daß die Schubkräfte längs des ganzen Schalenrandes und die Normalkräfte am Binder auf statisch bestimmte Weise folgen. Die Schubkräfte werden vom Randglied und vom Binder aufgenommen. Die Schnittkräfte N_x längs des Binders werden in die Mittelschale eingeleitet. Das Kräftegleichgewicht der Membrantheorie ist somit überall gesichert. Störungen des Membranspannungszustandes sind allerdings noch durch Widersprüche in den Verformungen der Schale und der Randglieder bzw. des Binders zu erwarten. Zu ihrer Berechnung müßte die Biegetheorie herangezogen werden.

3. Beseitigung der Randsingularitäten

Die durch (1) gegebenen senkrechten Randtangentialebenen haben zur Folge, daß sich Gleichung (2) längs der Ränder singular verhält, was für ihre Integration unbequem ist. Diese Schwierigkeit, die — mit Ausnahme der Verhältnisse an den Eckpunkten $\xi = 1$, $\eta = \pm 1$ — nur formaler und nicht

mechanischer Natur ist, kann jedoch durch die folgende Transformation behoben werden:

$$\left. \begin{aligned} z'' &= -abw'' \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1-\xi^3} \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z''}{b}\right)^2}, \\ z'' &= -abw'' \frac{1-\xi^3}{1-\eta^2} \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z''}{b}\right)^2}, \\ 2z' &= -abw'' \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z''}{b}\right)^2}; \\ F'' &= -H'' \frac{1-\eta^2}{\sqrt{1-\xi^3}}, \quad F'' = -H'' \frac{1-\xi^3}{\sqrt{1-\eta^2}}, \\ F'' &= -H'' \end{aligned} \right\} \quad (7a-f)$$

Für die Funktionen w'' , w'' , w'' und H folgt dann aus (2)

$$H'' w'' + H'' w'' + H'' w'' = gab. \quad (8)$$

Berücksichtigt man, daß nach (1)

$$\begin{aligned} z'' &= -3h\xi \left(2 + \frac{1-\frac{1}{4}\xi^3}{\sqrt{1-\xi^3}} \right) (1-\eta^2 + \sqrt{1-\eta^2}), \\ z'' &= -h(1-\xi^3 + \sqrt{1-\xi^3}) \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}^3} \right), \\ z'' &= -3h\xi^2 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^3}} \right) \eta \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \right) \end{aligned}$$

ist und führt die Abkürzung

$$N = \left[(1-\eta^2)(1-\xi^3) + \frac{9h^2\xi^4}{4a^2} (2\sqrt{1-\xi^3} + 1)^2 (1-\eta^2) (1-\eta^2 + \sqrt{1-\eta^2})^2 + \frac{h^2\eta^2}{b^2} (1 + 2\sqrt{1-\eta^2})^2 (1-\xi^3) (1-\xi^3 + \sqrt{1-\xi^3})^2 \right]^{1/2}$$

ein, so wird

$$\left. \begin{aligned} w'' &= \frac{3h\xi}{abN} (1-\eta^2 + \sqrt{1-\eta^2}) \left(1 - \frac{1}{4}\xi^3 + 2\sqrt{(1-\xi^3)^3} \right), \\ w'' &= \frac{3h\xi^2\eta}{abN} (1 + 2\sqrt{1-\eta^2}) (1 + 2\sqrt{1-\xi^3}), \\ w'' &= \frac{h}{abN} (1 + 2\sqrt{(1-\eta^2)^3}) (1 - \xi^3 + \sqrt{1-\xi^3}). \end{aligned} \right\} \quad (9a, b)$$

¹⁾ Diese Bezeichnungen sind lediglich aus formalen Gründen eingeführt. Eine Funktion w existiert wegen Verletzung der Integrabilitätsbedingungen nicht.

Aus (9) folgt dann zunächst, daß die Koeffizienten in (8) frei von Singularitäten sind. Dasselbe gilt unter Ausschluß der Eckpunkte auch für die übrigen Größen in (8), wenn F in der Form

$$F = (1 - \xi) (1 - \eta^2) F^* \quad (10)$$

angesetzt und verlangt wird, daß sich F^* einschließlich seiner Ableitungen bis zur zweiten Ordnung im ganzen Schalenbereich nicht-singulär verhält. Die Singularität in den Ecken läßt sich im Rahmen der Membrantheorie nicht beseitigen. Es zeigt sich nämlich, daß sich wohl Funktionen F angeben lassen, die zu endlichen Membrankräften in den Ecken führen, daß aber dann die zugehörige Auflast g unendlich groß sein muß, wenn sie auch einen konvergenten Integralwert besitzt.

4. Lösung der Differentialgleichung

Da der Versuch, eine geschlossene Lösung von (8) zu finden, hoffnungslos erscheint, wird man ein geeignetes numerisches Verfahren verwenden. Es liegt nahe, die von *Pucher*¹⁾ mit Erfolg benutzte Differenzenmethode heranzuziehen. Ein Versuch dieser Art lieferte jedoch die Erkenntnis, daß die Differenzenmethode hier unbrauchbar ist. Der Grund hierfür besteht darin, daß die Koeffizienten in (8), anders als bei den Beispielen von *Pucher*, sehr stark schwanken. Der Spannungsverlauf zeigt Nulldurchgänge und mehrfachen Krümmungswechsel, dem die Trägheit des Differenzenverfahrens nicht zu folgen vermag. Als zweckmäßig erwies sich jedoch der folgende Lösungsweg.

Für F wird in Übereinstimmung mit der Forderung (10) der Ansatz

$$F = (1 - \xi) (1 - \eta^2) \sum a_m \xi^m \sum b_{2n} \eta^{2n}, \quad (11)$$

$$m, n = 1, 2, \dots,$$

gemacht. Die Koeffizienten a , b werden dabei im Sinne der Kollokationsmethode²⁾ so bestimmt, daß die Auflast g für eine Reihe ausgewählter Punkte die vorgegebenen Werte annimmt. Es ist aber unzumutbar, die notwendige Genauigkeit allein dadurch erreichen zu wollen, daß hinreichend viele Glieder in (11) mitgenommen werden. Besser ist es, lediglich am Binder und an einigen wenigen weiteren Punkten die geforderte Bedingung zu erfüllen, so daß der entstehende Ausdruck für F nicht zu kompliziert wird. Die so erhaltene Lösung ist dann allerdings im allgemeinen noch nicht ausreichend genau, sondern stellt lediglich eine „Grundlösung“ F_0 dar, die noch auf folgende Weise zu verbessern ist.

Zunächst sei betont, daß der Fehler von F_0 sehr leicht festzustellen ist. Man braucht nur die zu F_0 exakt gehörige Gewichtsverteilung g_0 zu berechnen. Die Differenz $g - g_0$ ist dann unmittelbar ein zweckmäßiges und anschauliches Maß für den Fehler, das sofort erkennen läßt, wo Verbesserungen notwendig sind. In einem solchen Bereich werden die Verbesserungen nun so angebracht,

¹⁾ A. *Pucher*, Bauingenieur 18 (1937), S. 118.

²⁾ Vgl. z. B. L. *Collatz*, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951, S. 270.

daß in anderen Bereichen die Lösung nicht schlechter wird. Dieses läßt sich erreichen durch Zusatzlösungen ΔF von der Form

$$\Delta F = (1 - \xi) (1 - \eta^2) \exp (\Sigma a_\mu \xi^\mu \Sigma b_\nu \eta^\nu), \quad (12)$$

$$\mu, \nu = 1, 2, \dots,$$

wenn man die a_μ, b_ν so wählt, daß das zu ΔF gehörige Δg außerhalb des gerade zu korrigierenden Fehlerbereiches abgeklungen ist. Eine feste Vorschrift für die Wahl der a_μ, b_ν wird nicht aufgestellt. Diese werden vielmehr unter weitgehender Ausnutzung der Anschauung und Rechenerfahrung den praktischen Erfordernissen angepaßt. Durch diese „Pflastermethode“ läßt sich mit ertragbarem Rechenaufwand eine Näherungslösung $F_0 + \Delta F$ konstruieren, deren Fehler durch die Differenzen $g - (g_0 + \Delta g)$ genau bekannt ist.

5. Zahlenbeispiel

Zur weiteren Erläuterung sei das Rechenergebnis für eine Schale mit folgenden Abmessungen angeführt:

$$a = 12,5 \text{ m}, \quad b = 12 \text{ m}, \quad 2h = 3,4 \text{ m}.$$

Für die Belastung gilt

$$g = f_1(\xi) f_2(\eta),$$

wobei die Funktionen f_1 und f_2 aus Abb. 3 hervorgehen.

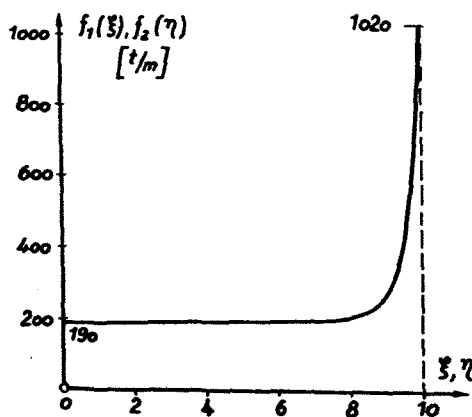


Abb. 3. Belastung der Schale für das Zahlenbeispiel. Die Funktion $f_1(\xi)$ geht in die Funktion $f_2(\eta)$ über, wenn ξ durch η ersetzt wird

g beträgt im mittleren Schalenbereich 190 kg/m^2 und steigt nach den Schalenrändern hin auf 1020 kg/m^2 an. Diesem Anwachsen der Schalenbelastung entspricht ein Anwachsen der Schalenstärke, was günstig ist, um eine Doppelschalung vermeiden zu können.

Als geeignete Grundlösung wird angesetzt

$$F_0 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \left(1 + \frac{2}{3} \eta^2 \right) \left(-0,9 + \xi + \frac{1}{3} \xi^3 \right).$$

Für die pflasterartigen Verbesserungen wird gewählt

$$\Delta F_1 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \exp(3 \xi^3 + \eta^2),$$

$$\Delta F_2 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \exp[-5(\xi - 0,7)^2 + 5(\eta^2 - 1)],$$

$$\Delta F_3 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \exp[-5\xi^2 - 5(1 - \eta^2)],$$

$$\Delta F_4 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \exp[-17,5(\xi - 0,2)^2 - 12(\eta^2 - 0,5^2)],$$

$$\Delta F_5 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 + \xi) \exp[-25(\xi - 0,75)^2 + 3\eta^2],$$

$$\Delta F_6 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \exp(-8\xi),$$

$$\Delta F_7 = (1 - \xi)(1 - \eta^2) \exp(-6\xi).$$

Daraus wird die Gesamtlösung

$$F = 0,86 \left[0,7 F_0 + 0,7 \left(\frac{1}{15} \Delta F_1 - 2 \Delta F_2 - 0,4 \Delta F_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,01 \Delta F_4 - 0,01 \Delta F_5 \right) + 0,09375 (\Delta F_6 - 1,8 \Delta F_7) \right]$$

gebildet. Die sich damit ergebenden Schalenschnittkräfte und Hauptspannungsrichtungen gehen aus den Abb. 4 bis 9 hervor.

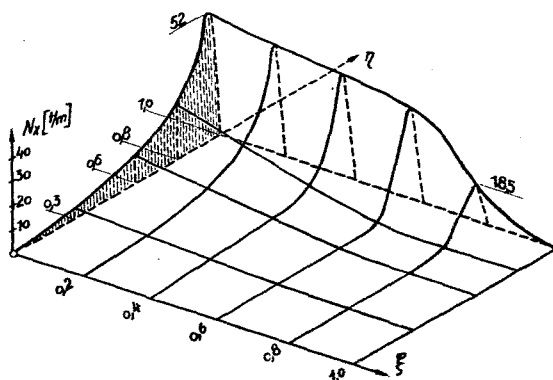


Abb. 4. Schnittkraft N_x in Abhängigkeit von x und y

In Abb. 4, 5, 6 sind die Schnittkräfte N_x , N_y und N_{xy} in Abhängigkeit von x und y dargestellt. Abb. 7 zeigt die Grundrißprojektion der Spannungstrajektorien. In Abb. 8 und 9 sind die in Richtung der Spannungstrajektorien wirkenden Hauptnormalkräfte aufgetragen, die mit S_1 und S_2 bezeichnet sind.

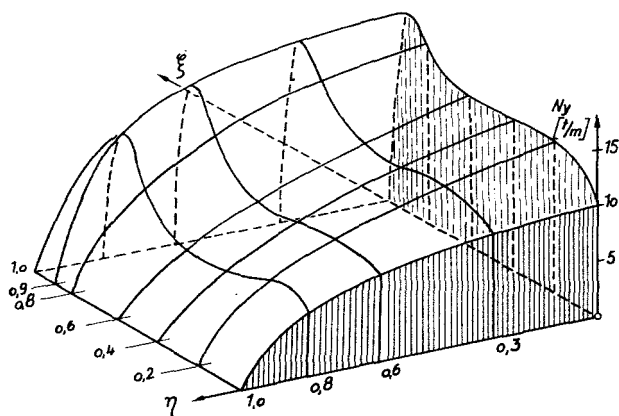


Abb. 5. Schnittkraft N_y in Abhängigkeit von x und y

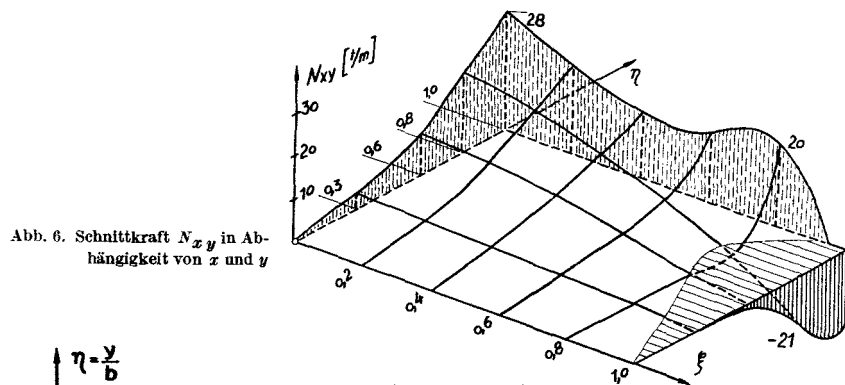


Abb. 6. Schnittkraft N_{xy} in Abhängigkeit von x und y

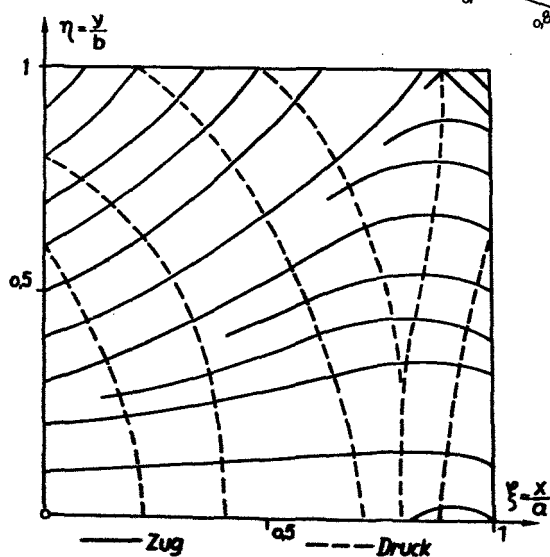
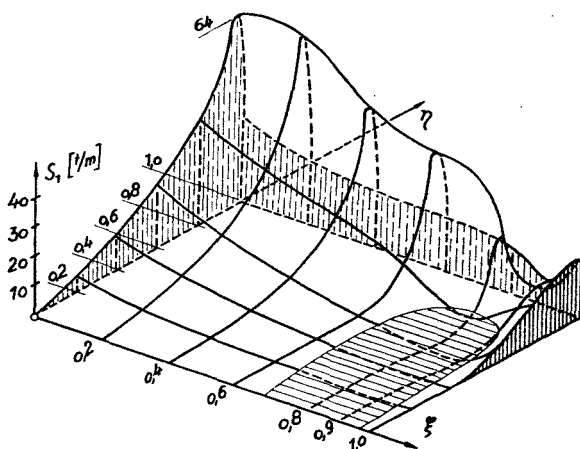
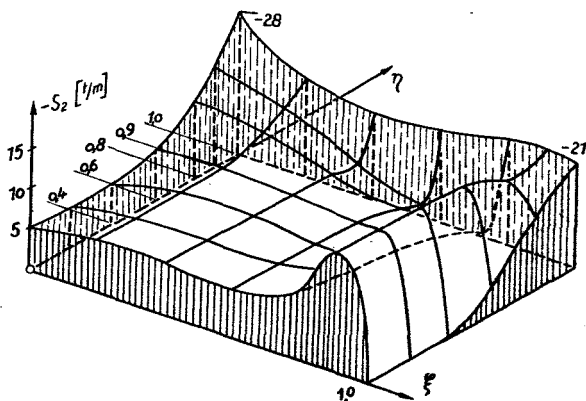


Abb. 7. Projektion der Spannungstrajektorien auf die $x-y$ -Ebene

Abb. 8. Hauptnormalkraft S_1 in Abhängigkeit von x und y Abb. 9. Hauptnormalkraft S_2 in Abhängigkeit von x und y

6. Zusammenfassung

Für eine Kragsschale der durch (1) gegebenen Gestalt wird der Membranspannungszustand durch Integration der *Pucherschen* Differentialgleichung ermittelt. Die Integration erfolgt durch Ansatz einer „Grundlösung“, die für einzelne Punkte die Differentialgleichung exakt erfüllt, und durch Ermittlung von Verbesserungen, die als „Pflaster“ dort hinzugefügt werden, wo die Grundlösung nicht ausreicht. Die Brauchbarkeit der Methode wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt.